



ÓBUDAI EGYETEM  
ÓBUDA UNIVERSITY

# Forgatási szögek értelmezése a fotogrammetriában

Varga Attila

okl. gépészmérnök, PhD hallgató

*Óbudai Egyetem, Alkalmazott Informatikai és  
Alkalmazott Matematikai Doktori Iskola*



IV. Légi Térképészeti és Távérzékelési Konferencia  
Budapest, 2023. szeptember 21–22.

## Tartalom

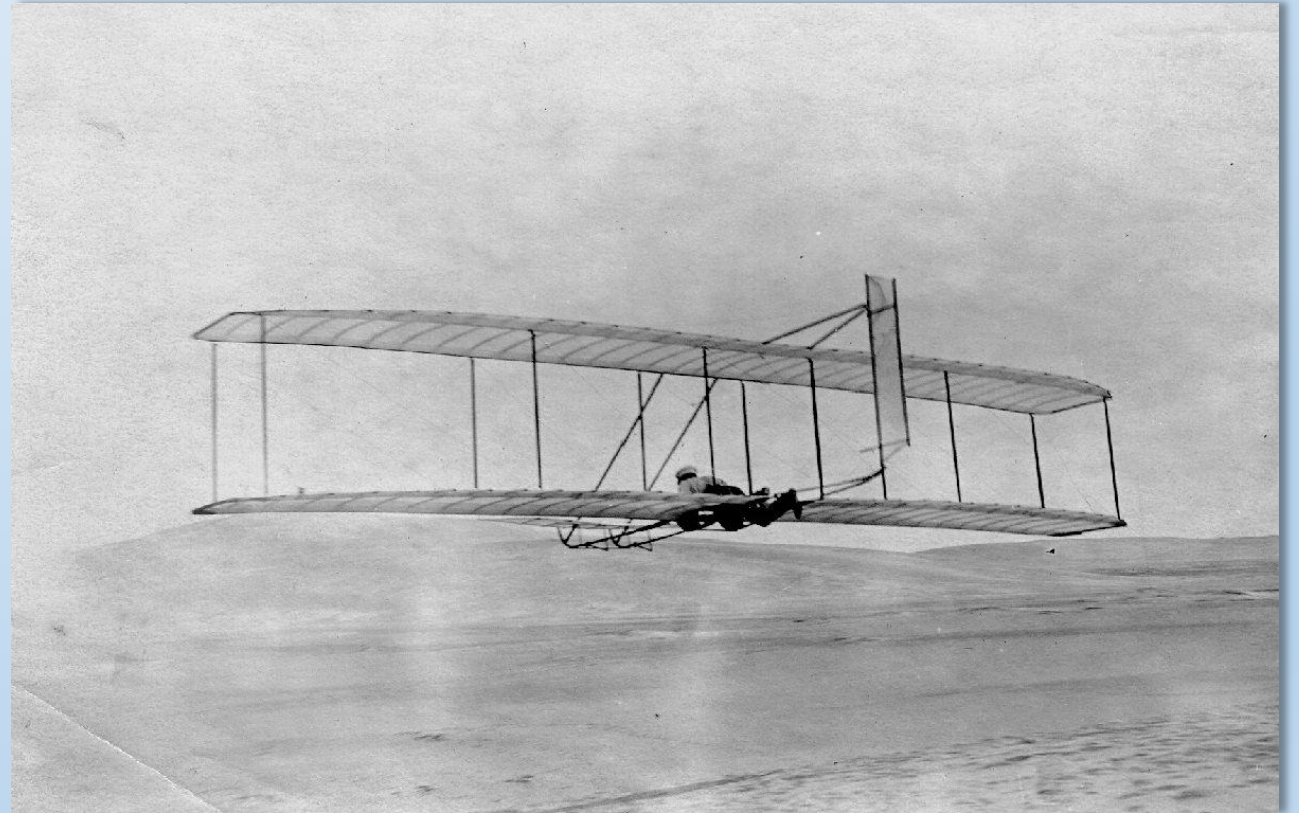
- Merev test térbeli helyzetének (orientációjának) matematikai értelmezése
- Forgatási szögek értelmezése, elemi forgatások, térbeli transzformáció
- Koordinátarendszerek a repülésben
- Transzformációk a koordinátarendszerek között
- Mágneses és földrajzi északi irány eltérése
- Fotogrammetriában használt koordinátarendszerek
- Fotogrammetriai szögek előállítása navigációs szögekből  
(yaw, pitch, roll)  $\rightarrow$  (omega,  $\phi$ , kappa)

## Előzmények

A Wright testvérek 1802-es  
siklórepülőgépe: oldalkormány használata

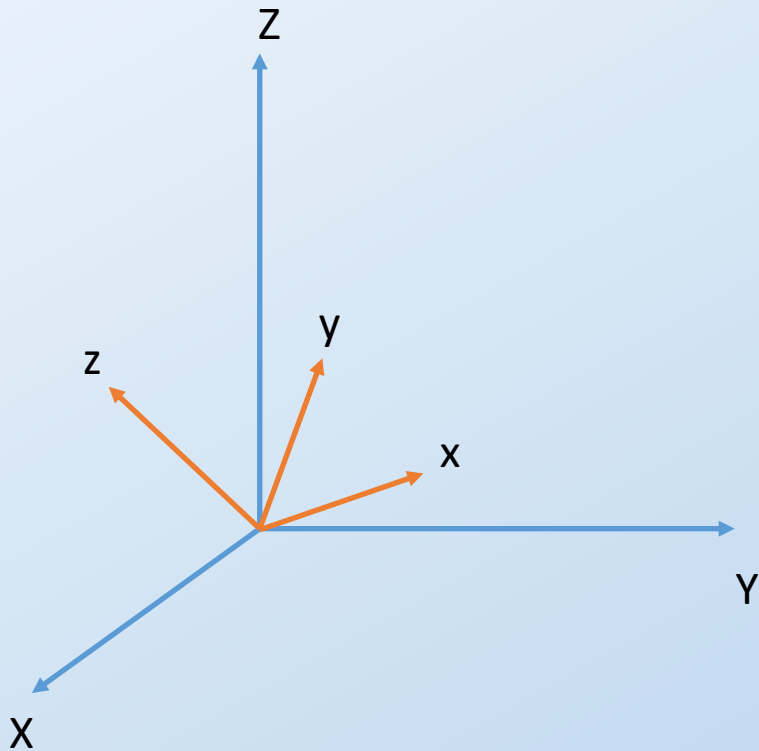
A repülőgép irányítása 3 tengely körül.

A feladat a repülőgép térbeli helyzetének  
matematikai leírása.



*Kép forrása: [wright-brothers.org](http://wright-brothers.org)*

## A térbeli helyzet meghatározása



xyz helyzete az XYZ-ben?

Euler-szögek:  
 $\alpha, \beta, \gamma$

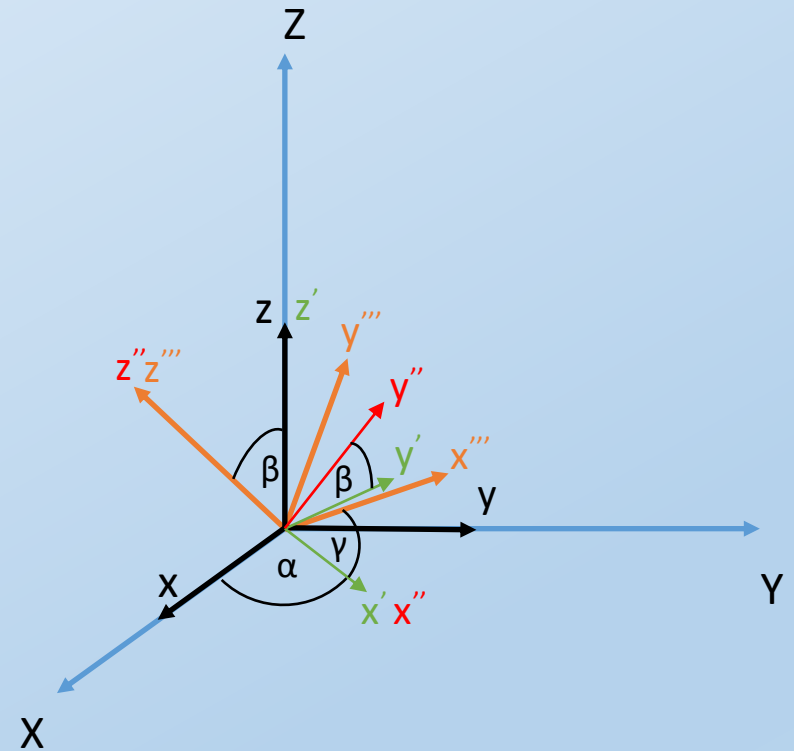
Elemi forgatások:

- z körül
- x körül
- z körül

(Klasszikus Euler-forgatás)

Más sorrendek:  
zyx, xyz (Tait-Bryen)

Sorrendek,  
konvenciók!

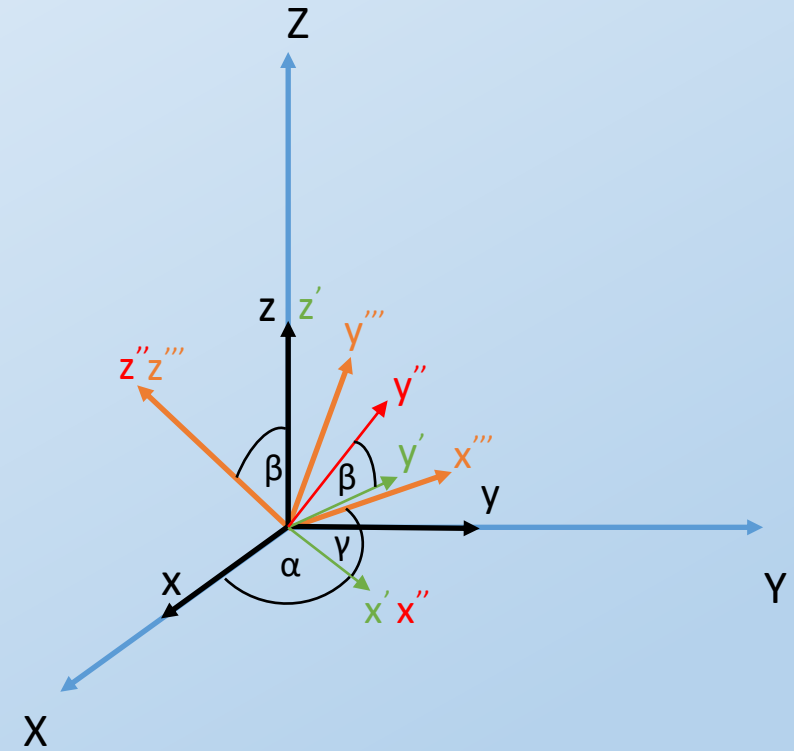


három elemi forgatás eredménye

## Térbeli transzformáció

Elemi forgatási mátrixok Z-X-Z  
forgatásnál (eredeti Euler-elforgatás)

$$\begin{matrix}
 & \mathbf{R}_z & & \mathbf{R}_x & & \mathbf{R}_z \\
 \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{matrix}$$



Forgatási mátrix

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cdot \cos \gamma - \cos \beta \cdot \sin \alpha \cdot \sin \gamma & \cos \alpha \cdot \sin \gamma - \cos \beta \cdot \cos \gamma \cdot \sin \alpha & \sin \alpha \cdot \sin \beta \\ \cos \gamma \cdot \sin \alpha + \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \sin \gamma & \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma - \sin \alpha \cdot \sin \gamma & \cos \alpha \cdot \sin \beta \\ \sin \beta \cdot \sin \gamma & \cos \gamma \cdot \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}$$

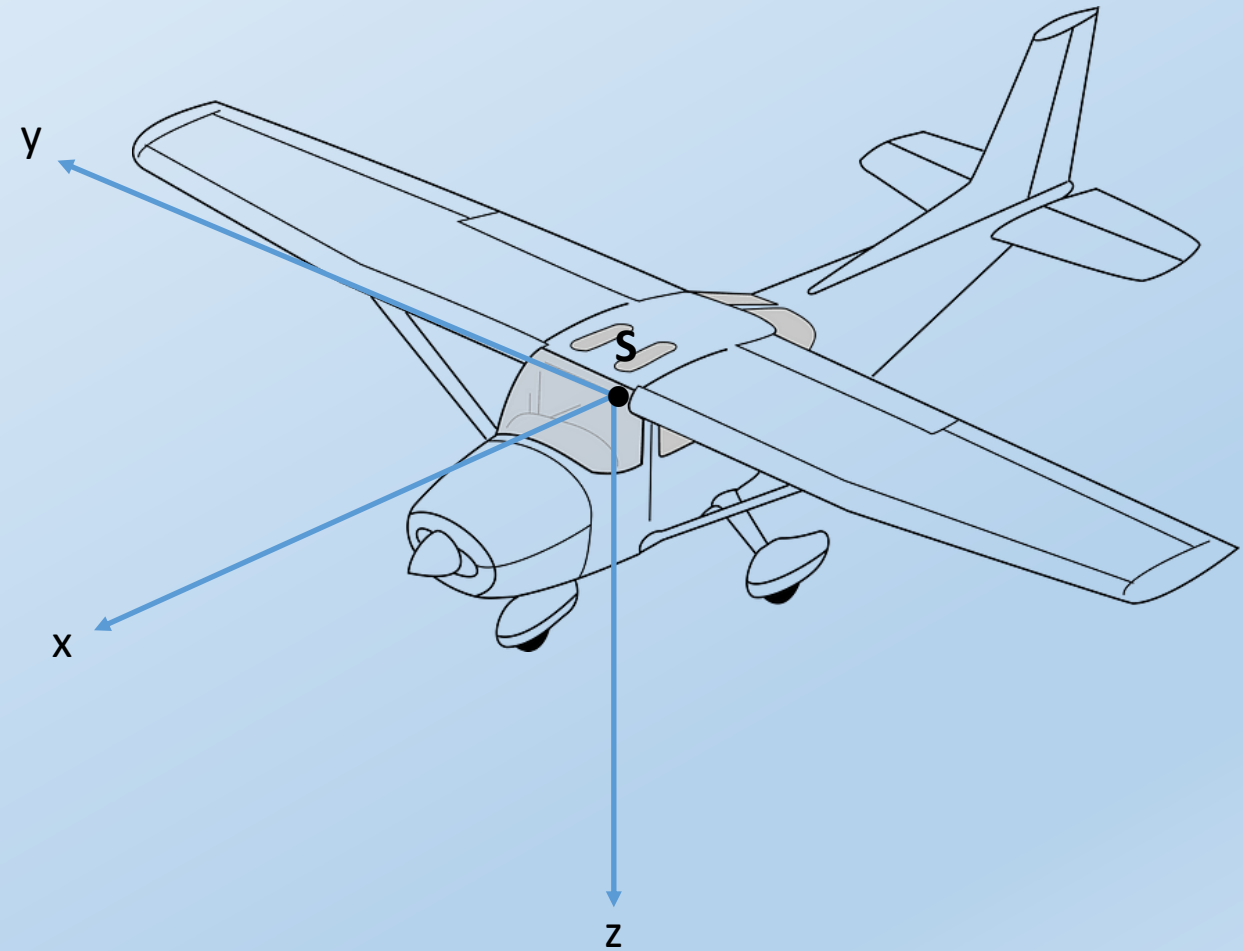
## Koordinátarendszerek

- Repülőgép-koordinátarendszer (body frame)
- Lokális földrajzi rendszer (navigációs rendszer)
- Földrajzi koordinátarendszer (Földhöz rögzített, nem inerciális)
- (Inerciális koordinátarendszer)
- Szenzor-koordinátarendszer
  - Gimbal-koordinátarendszer
  - Kamera-koordinátarendszer

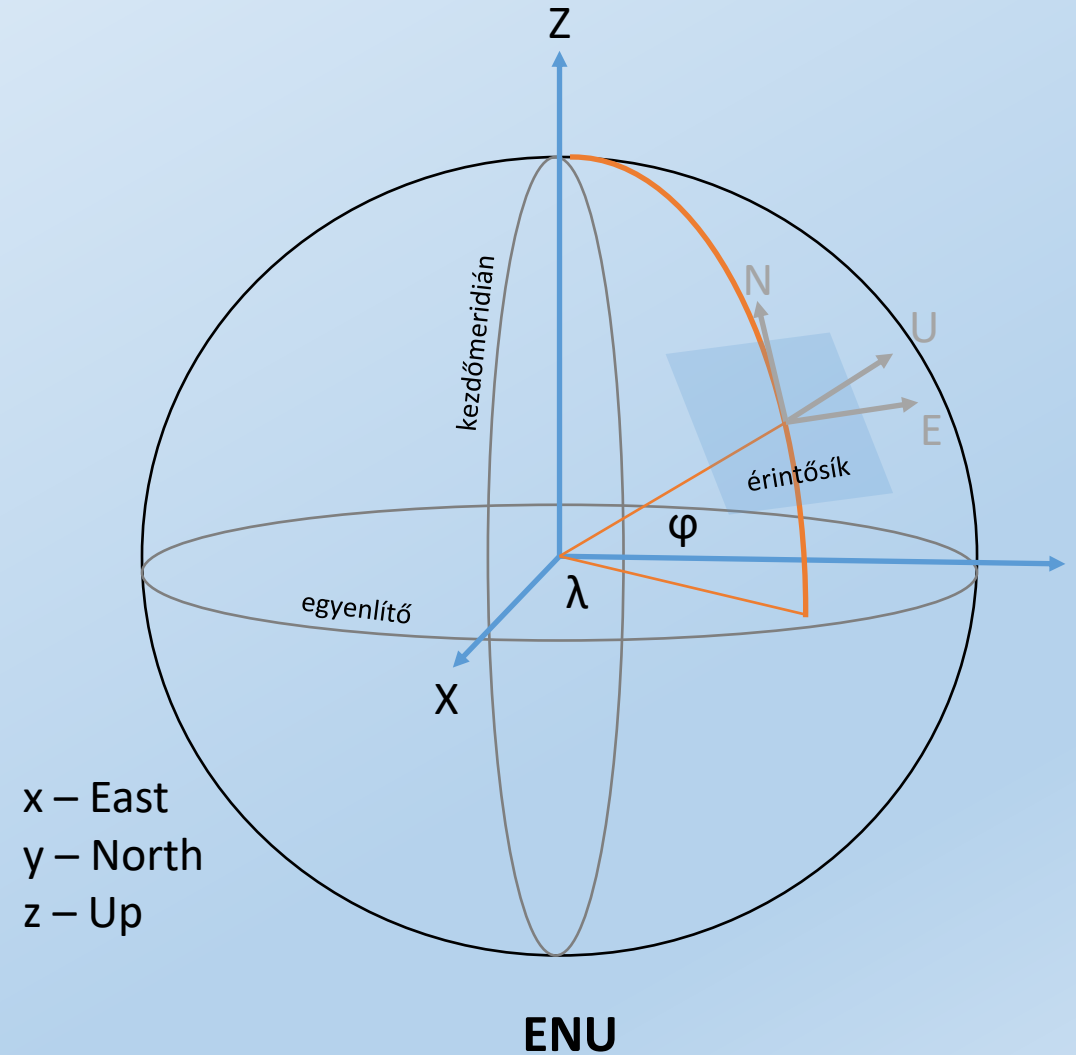
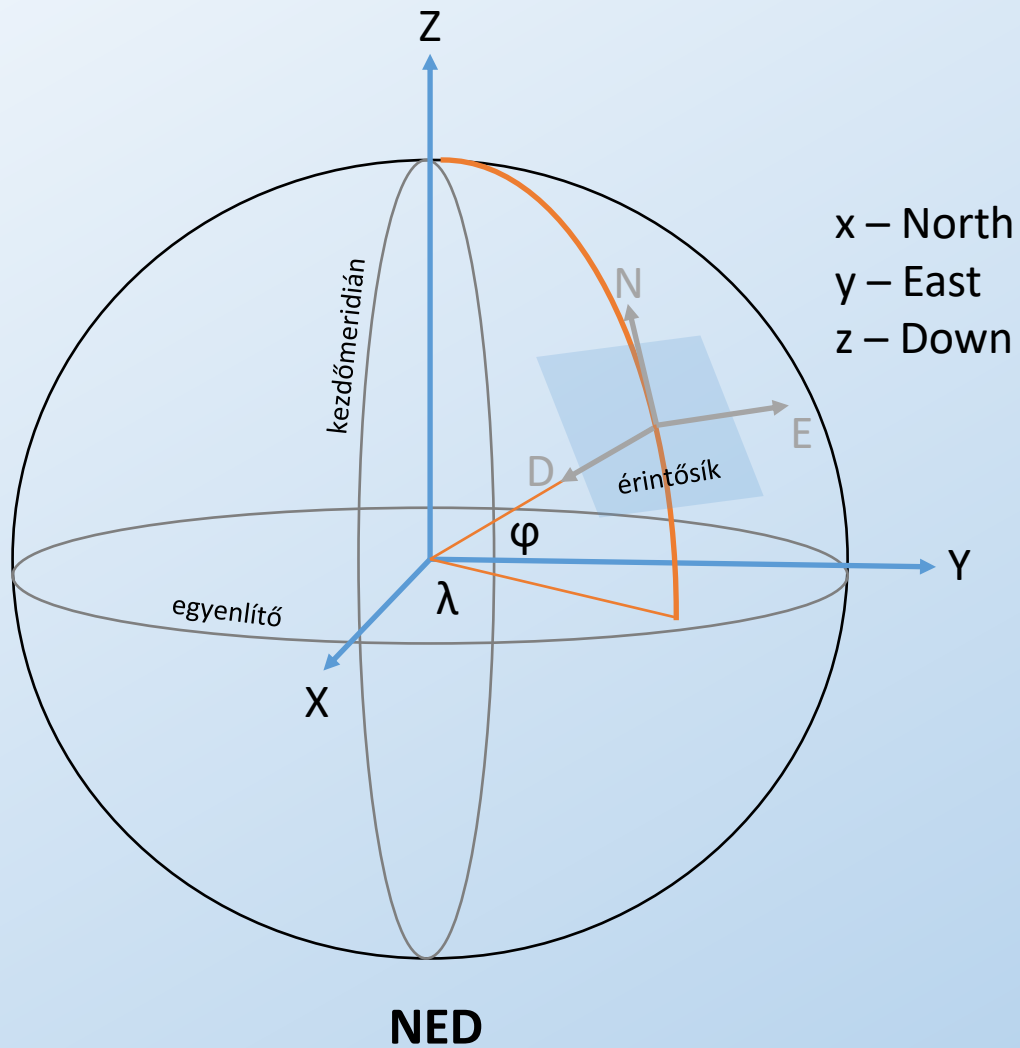
## Repülőgépkordinátarendszer (body frame)

Jellemzői:

- A repülőgép merev test
- Jobbsodrású rendszer
- Origó a tömegközéppontban
- X – repülőgép hossz tengelyével párhuzamos
- Y – a repülőgép kereszt tengelyével párhuzamos
- Z – az XY síkra merőleges, lefele mutat



## Navigációs (lokális) koordinátarendszer



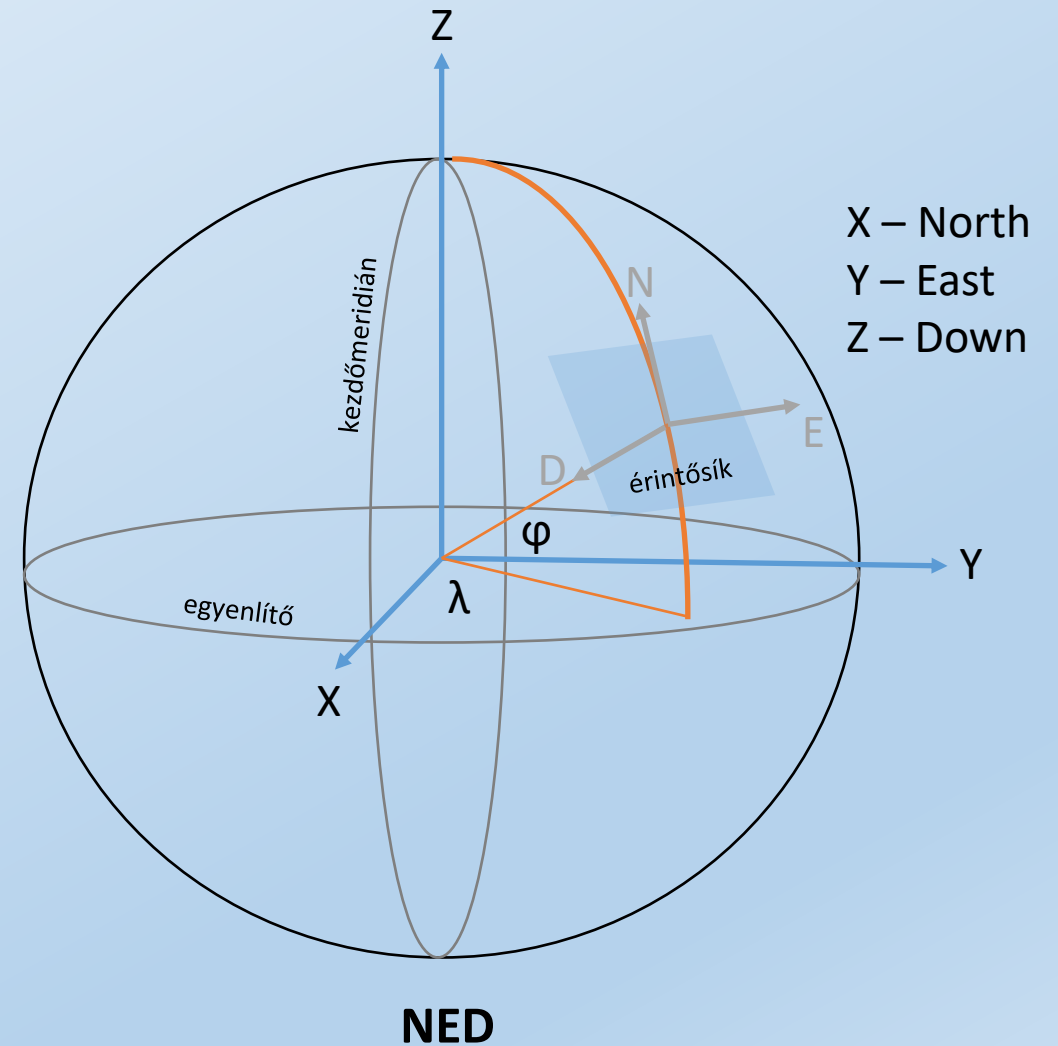


## A földrajzi koordinátarendszer és a lokális koordinátarendszer kapcsolata

A két koordinátarendszer egymáshoz viszonyított helyzete a szélességi ( $\varphi$ ) és hosszúsági fok ( $\lambda$ ) függvénye.

A forgatási mátrix a NED rendszer esetén:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \cdot \cos \lambda & -\sin \varphi \cdot \sin \lambda & \cos \varphi \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\cos \varphi \cdot \cos \lambda & -\cos \varphi \cdot \sin \lambda & -\sin \varphi \end{bmatrix}$$



## A repülőgép koordinátarendszerének és a lokális koordinátarendszer kapcsolata

Feladat: a repülőgép (body frame) helyzetének meghatározása a lokális földrajzi koordinátarendszerben

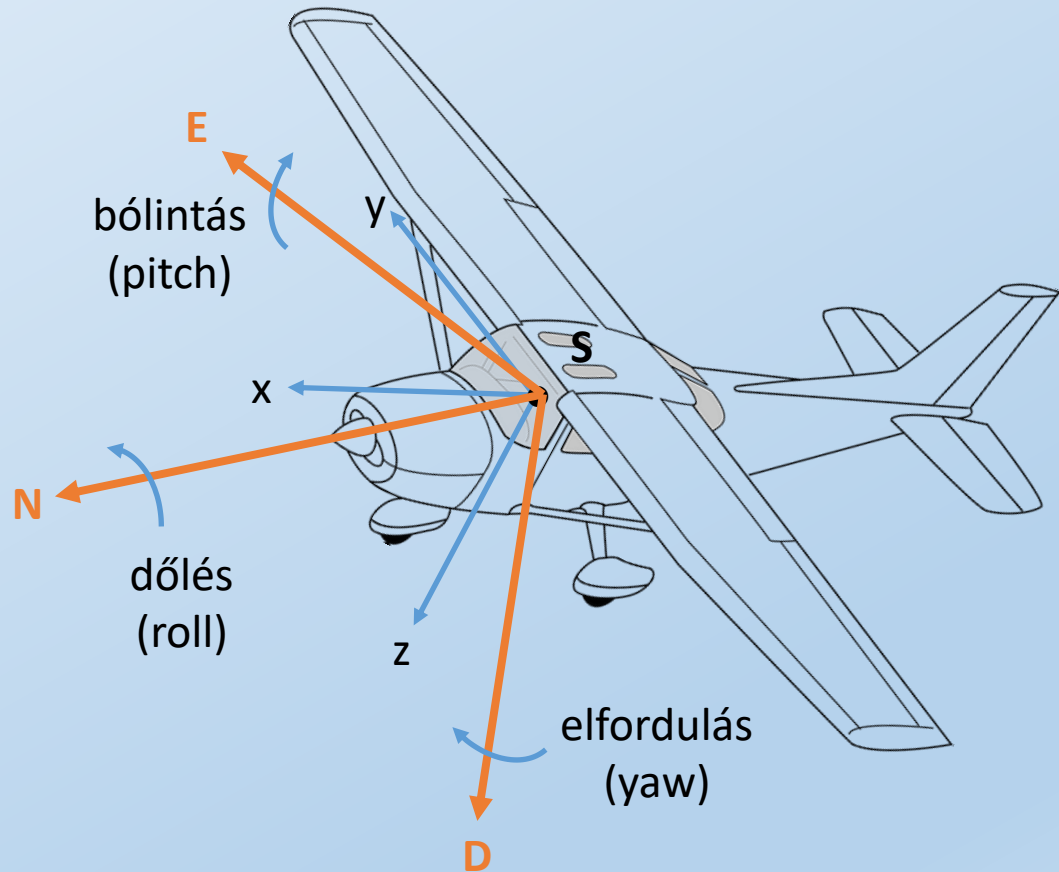
Forgatási szögek értelmezése és mérése:

X és Y (N, E) tengely körül: az inerciális mérőegység (giroszkóp)

Z (D) tengely körül: magnetométer (mágneses észak)

Pozitív irányok: jobbsodrású rendszer

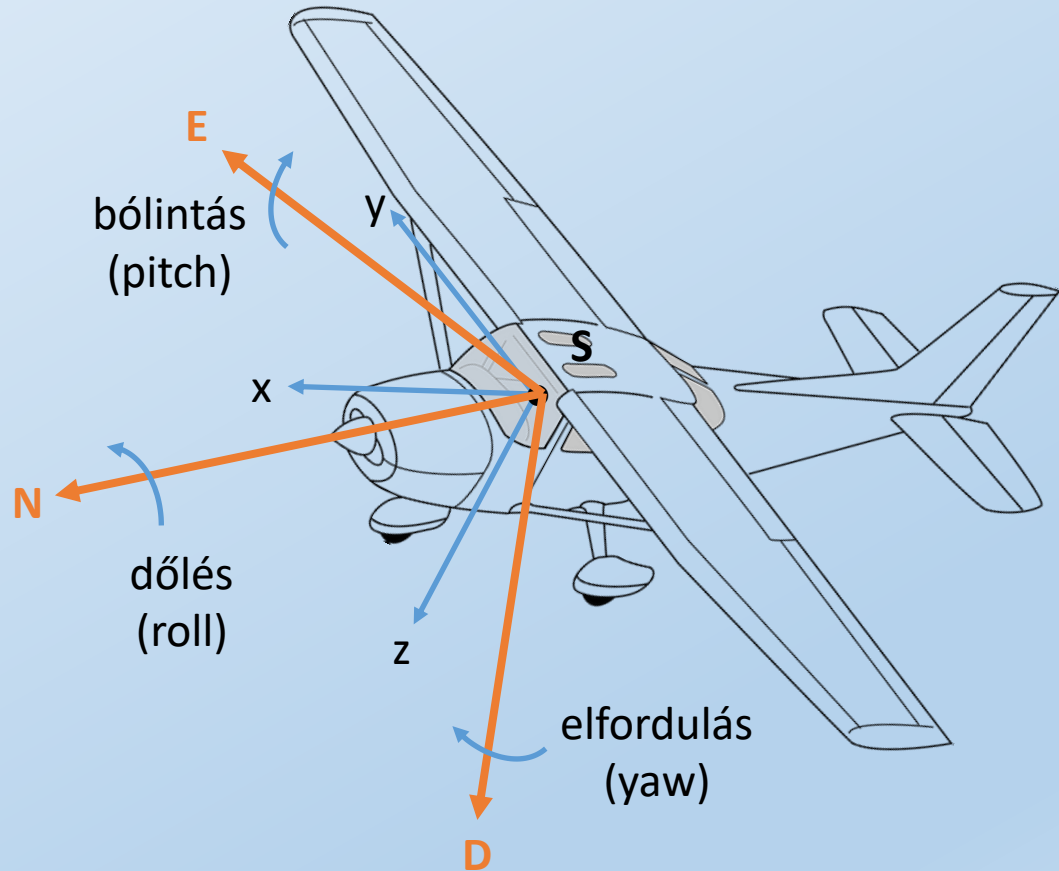
Sorrend: Z-Y-X



## A repülőgép-koordinátarendszer és a lokális koordinátarendszer kapcsolata

Transzformáció: Z (yaw) – Y (pitch) – Z (roll)

$$\begin{matrix}
 & \mathbf{R}_z & & \mathbf{R}_y & & \mathbf{R}_x \\
 \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}
 \end{matrix}$$



**R**

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha \cdot \cos \beta & \cos \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma - \sin \alpha \cdot \cos \gamma & \cos \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \gamma + \sin \alpha \cdot \sin \gamma \\ \sin \alpha \cdot \cos \beta & \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma + \cos \alpha \cdot \cos \gamma & \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \gamma - \cos \alpha \cdot \sin \gamma \\ -\sin \beta & \cos \beta \cdot \sin \gamma & \cos \beta \cdot \cos \gamma \end{bmatrix}$$

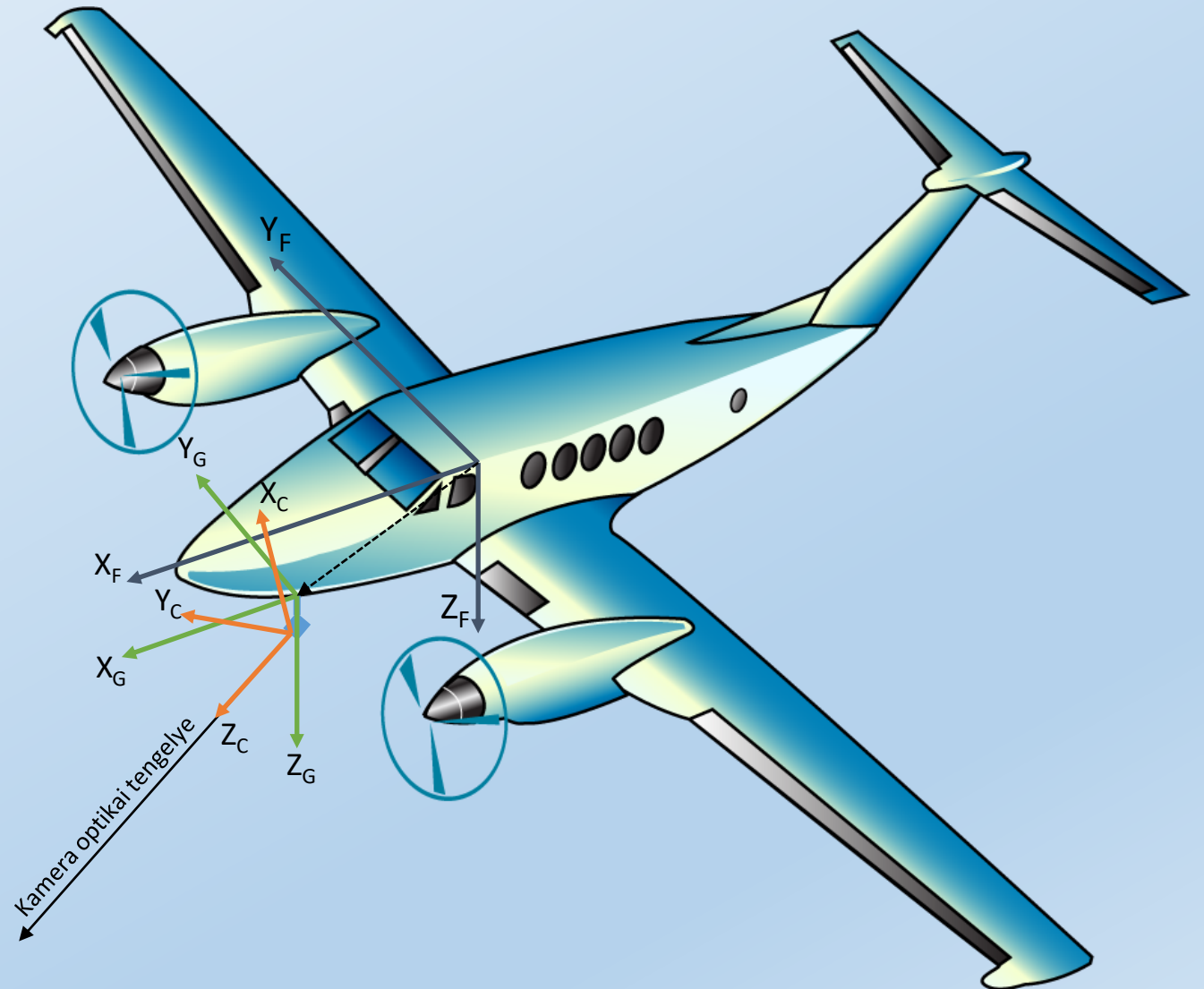
## Szenzor-koordinátarendszer

Szenzorok:

- fixen beépített kamera
- elfordítható kamera
- fixen beépített radar
- startracker (műholdon)
- napérzékelő (műholdon)
- stb.

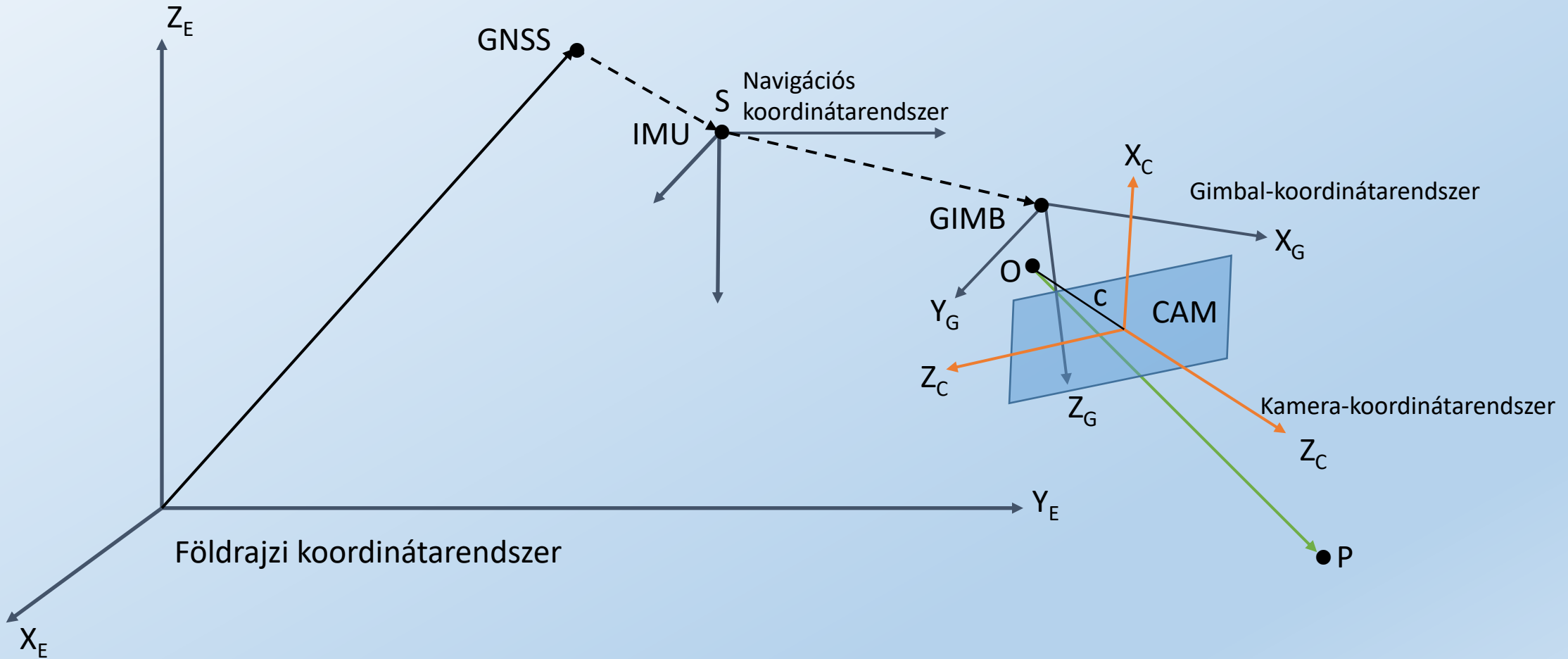
Body frame és a kamera-koordinátarendszer közötti kapcsolat

Lehet állandó v. időben változó



## A szenzor helyzete a földrajzi rendszerben

Transzformációk:  $T_{GNSS} * T_{FRAME} * T_{AIRCRAFT} * T_{GIMB} * T_{CAM}$



## Fotogrammetriai értelmezés (direkt tájékozás esete)

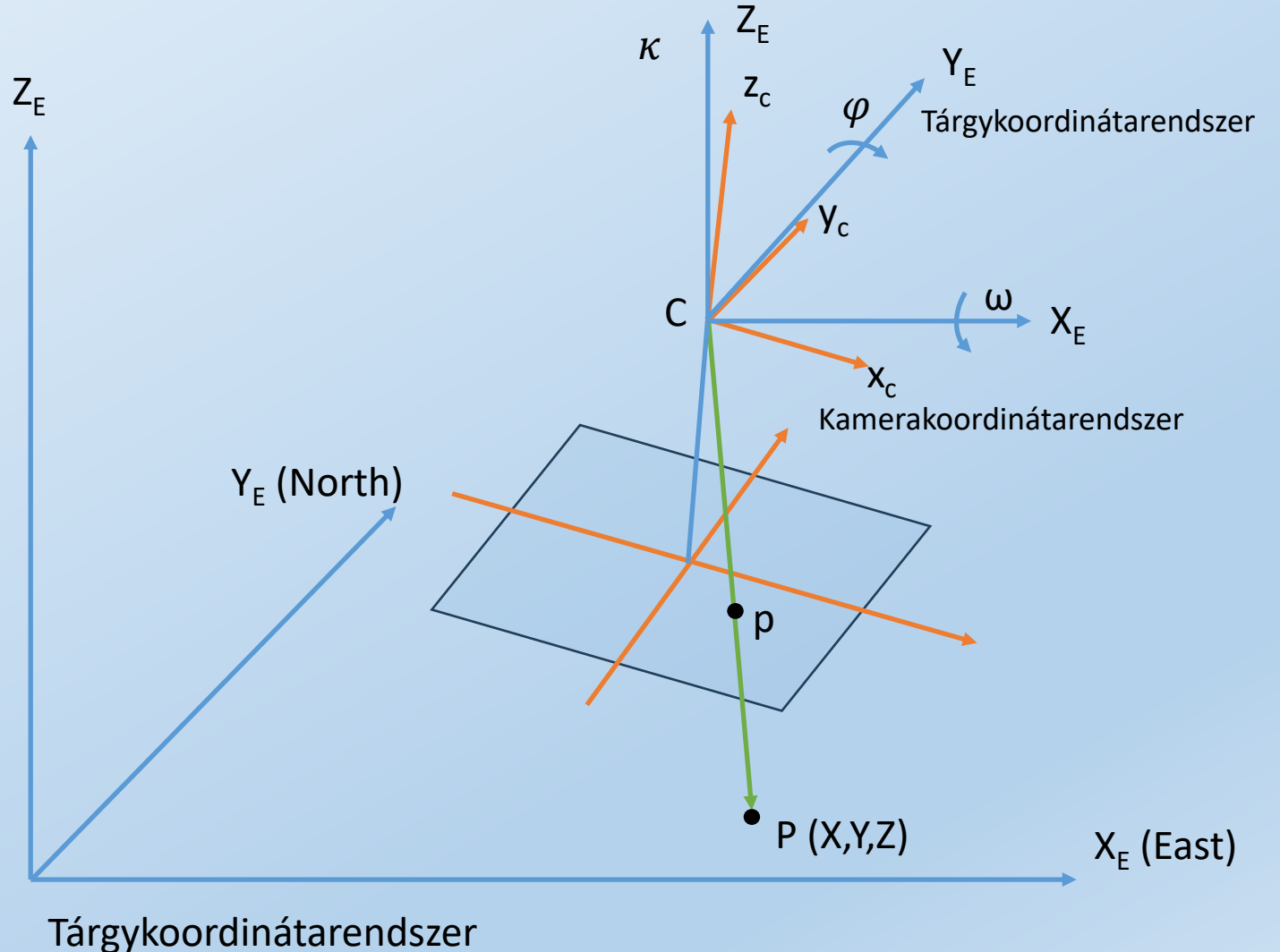
Tárgykoordinátarendszer: vetületi rendszer (Descartes-féle derékszögű koordinátarendszer)

Kamerakoordinátarendszer és képp koordinátarendszer kapcsolata

Forgatási szögek:

- $\omega$  ( $X_E$  körül)
- $\varphi$  ( $Y_E$  körül)
- $\kappa$  ( $Z_E$  körül)

Cél: a fotogrammetriai forgatási szögek előállításának meghatározásához a navigációs szögekből



## A földrajzi rendszer és a tárgykoordinátarendszer közötti kapcsolat

1. eset – kis területet érint a légi felmérés (pl. UAV alkalmazása)

A kamera földrajzi rendszerben mért szögeit közvetlenül felhasználják a fotogrammetriai rendszerben.  
A kis távolságok miatt a Föld felszínének görbülete elhanyagolható hibát okoz.

A két rendszerben definiált kamerakoordinátarendszereket meg kell feleltetni egymásnak.

Pl. jobbsodrású és balsodrású rendszer közötti transzformáció: 
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Példánkban: yaw –  $\kappa$ , pitch –  $\omega$ , roll –  $\varphi$

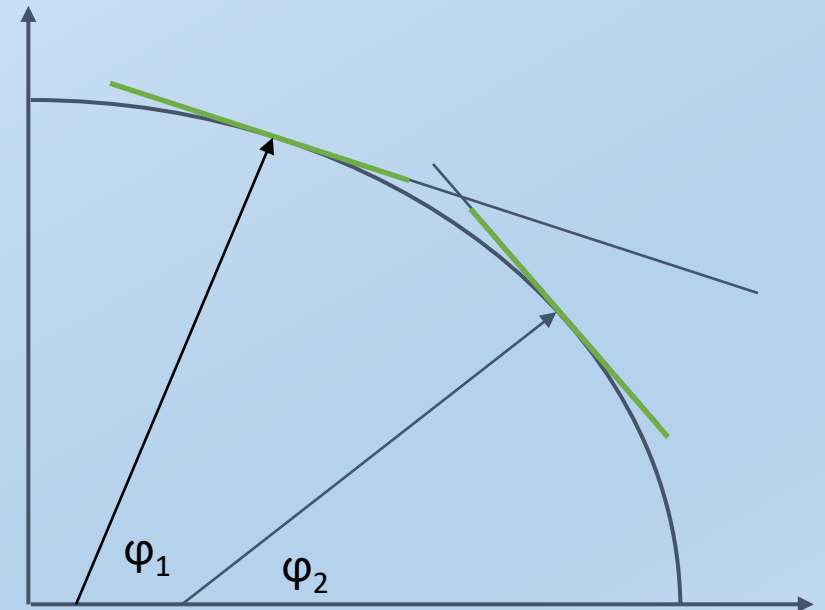
## A földrajzi rendszer és a tárgykoordinátarendszer közötti kapcsolat

2. eset – nagy területet érint a légi felmérés

Figyelembe kell venni a földrajzi vetület görbült felületét.

Transzformációs mátrix minden egyes képhez:

- $\varphi$  és  $\lambda$  függvénye
- használt vetületi rendszertől függő





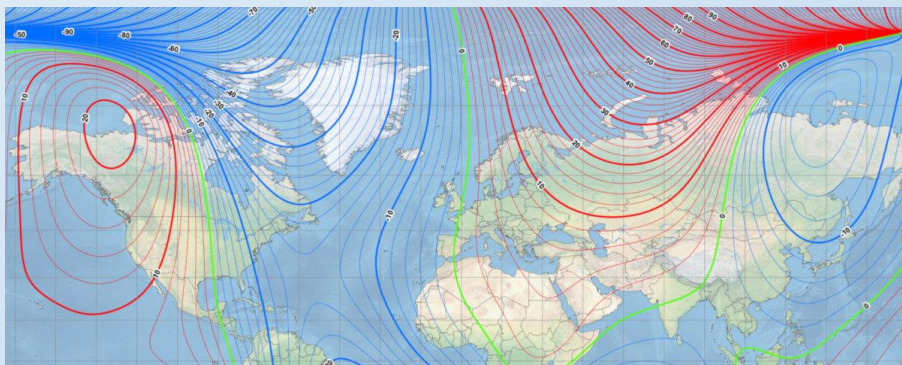
## Egyéb korrekciók

### Mágneses deklináció

Földrajzi pólusok és mágneses pólusok eltérnek

+ Pólusvándorlás

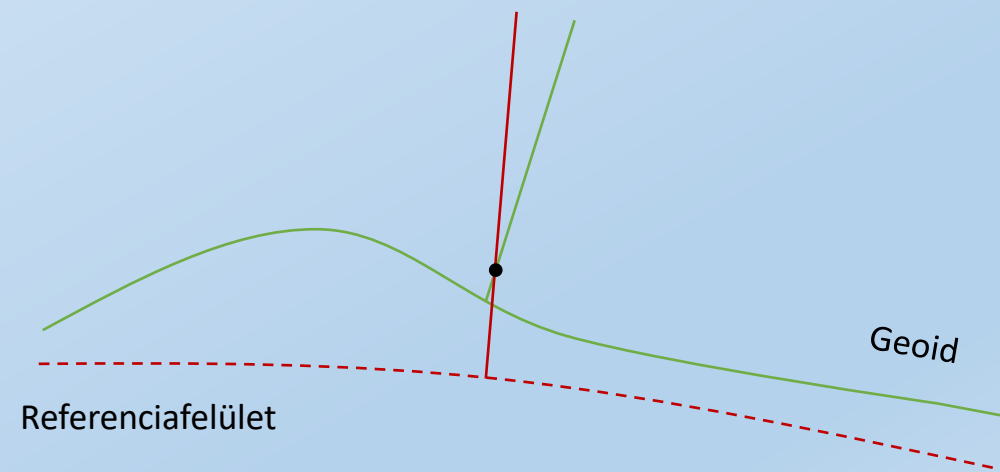
Az IMU mágneses északhoz viszonyított szöget. Ha az IMU ezt nem kezeli, akkor korrigálni kell.



WMM – World Magnetic Model

### Függőleges elhajlás (VD) hatása

A referenciaellipszoidhoz viszonyított függőleges és a geoidhoz viszonyított függőleges (gravitációs vektor eltér). Az IMU gravitációs irányt méri.



## Egyéb korrekciók

### Meridiánkonvergencia

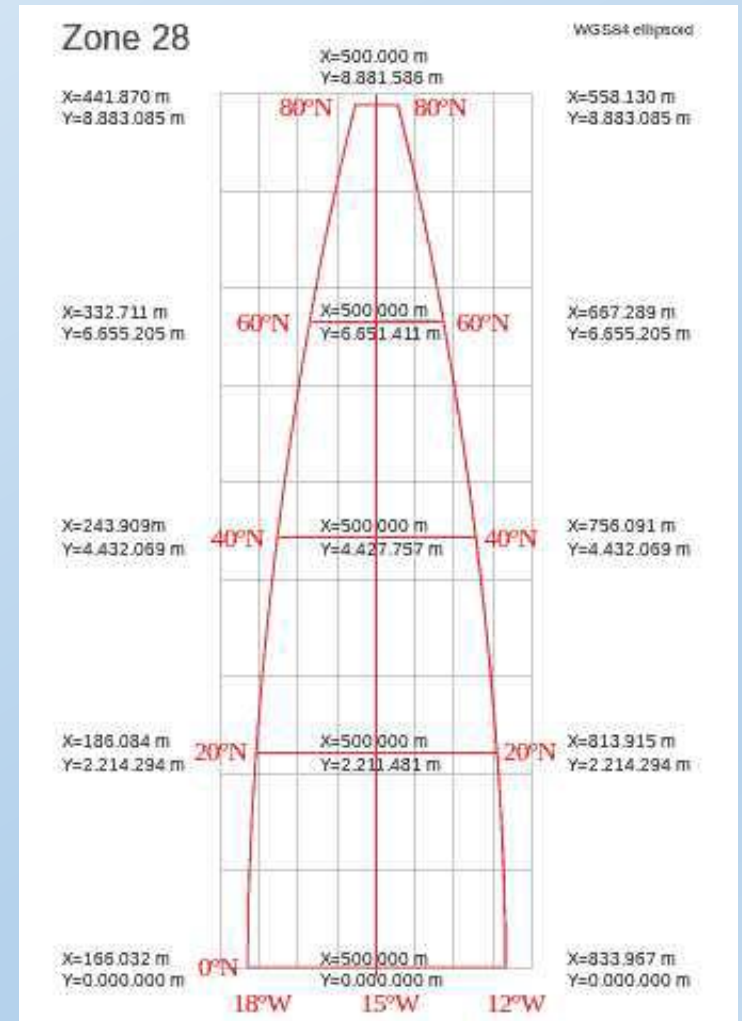
A vetületi rendszertől és a földrajzi helytől függ.

A földrajzi észak (meridiánvonal) és a vetületi rendszer rácsvonalai által jelölt északi irány eltérése.

Függvénnyel számítható.

Pl. EOVS esetén:

$$\begin{aligned} \mu = & 3479,4960y + 58,6959xy - 0,47255y^3 \\ & + 1,41765x^2y - 0,0263xy^3 + 0,0263x^3y - \\ & 0,0010x^2y^3 + 0,0005x^4y + 0,0001y^5 \\ & (x,y: 100 \text{ km}, \mu \text{ fokmásodpercben}) \end{aligned}$$



Meridiánkonvergencia UTM szelvényen



ÓBUDAI EGYETEM  
ÓBUDA UNIVERSITY

Köszönöm a figyelmet!

Kapcsolat: [vargaa@stud.uni-obuda.hu](mailto:vargaa@stud.uni-obuda.hu)